# CBS

## Colegio Bautista Shalom

# Matemática I
# Básicos PFS
# Primer Semestre

## Contenidos

### CONJUNTOS NUMÉRICOS

- ✓ NÚMEROS NATURALES.
- ✓ NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS.
- ✓ NÚMEROS ENTEROS.
- ✓ NÚMEROS RACIONALES.

### POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

- ✓ POTENCIACIÓN.
  - PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS.
- ✓ RADICALES.
  - RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES.

**NOTA:** conforme vayas avanzando en tu aprendizaje, encontrarás ejercicios que debes resolver. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a).

## CONJUNTOS NUMÉRICOS

**1) N = Conjunto de los Números Naturales**

**N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,.......}**

El conjunto de los Números Naturales surgió de la necesidad de contar, lo cual se manifiesta en el ser humano desde sus inicios.

Este conjunto se caracteriza porque:

- Tiene un número **infinito** de elementos
- Cada elemento tiene un **sucesor** y todos, **excepto el 1,** un **antecesor.**
- El sucesor de un número natural se obtiene sumando uno (+1); el antecesor se obtiene restando uno (-1).

**2) N* = $N_0$ = Conjunto de los Números Cardinales**

**$N_0$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,.....}**

Al Conjunto de los Números Naturales se le agregó el 0 (cero) y se forma el Conjunto de los Números Cardinales.

**3) Z = Conjunto de los Números Enteros.**

**Z = {..... –3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}**

El Conjunto de los Números Enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los Conjuntos Naturales y Cardinales (por ejemplo: 5 – 20 = ¿?). Debido a esto, la recta numérica se extiende hacia la izquierda, de modo que a cada punto que representa un número natural le corresponda un **punto simétrico**, situado a la izquierda del cero. Punto simétrico es aquel que está ubicado a igual distancia del cero (uno a la derecha y el otro a la izquierda de él).

**Z** = **N* U Conjunto de los Números Enteros negativos.**

Z = Tiene 3 Subconjuntos:

Enteros Negativos: $Z^-$
Enteros Positivos: $Z^+$
Enteros Positivos y el Cero: $Z_0^+$

Por lo tanto, el Conjunto de los **Números Enteros** es la unión de los tres subconjuntos mencionados. **$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$**

**4) Q** = **Conjunto de los Números Racionales.**

Q = {....- ¾, - ½, - ¼, 0, ¼, ½, ¾,.....}

El conjunto de los Números Racionales se creó debido a las limitaciones de cálculo que se presentaban en el conjunto de los Números Naturales, Números Cardinales y Números Enteros. Por ejemplo, sólo se puede dividir en el conjunto de los Números Enteros **si y sólo si** el **dividendo es múltiplo, distinto de cero, del divisor.**

Se expresa por comprensión como:

$$Q = \{ a/b \text{ tal que } a \text{ y } b \in Z;\ y\ b \neq 0 \}$$

**5) I = Q* = Conjunto de Números Irracionales**

**I = Conjunto de Números Decimales Infinitos no Periódicos**

Este conjunto surgió de la necesidad de reunir a ciertos números que no pertenecen a los conjuntos anteriores; entre ellos se pueden citar a las **raíces inexactas, el número Pi,** etc. A él pertenecen todos los **números decimales infinitos puros**, es decir aquellos números que no pueden transformarse en una fracción. No deben confundirse con los números racionales, porque éstos son números decimales finitos, infinitos periódicos e infinitos semiperiódicos que **sí pueden transformarse en una fracción.**

Ejemplos:

**a.** 1,4142135.... **b.** 0,10200300004000005....

**NÚMEROS NATURALES**

El **conjunto de los números naturales** está formado por:

**N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...}**

Con los **números naturales** contamos los elementos de un conjunto (número cardinal). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (número ordinal).

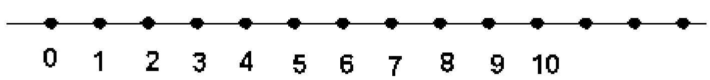
Los **números naturales** están **ordenados**, lo que nos permite comparar dos **números naturales:**

5 **>** 3; 5 es **mayor que** 3.
3 **<** 5; 3 es **menor que** 5.

Los **números naturales** son **ilimitados**, si a un número natural le sumamos 1, obtenemos otro **número natural**.
**Representación de los números naturales:**

Los números naturales se pueden representar en una recta ordenados de menor a mayor.

Sobre una recta señalamos un punto, que marcamos con el número cero. A la derecha del cero, y con las mismas separaciones, situamos de menor a mayor los siguientes números naturales: 1, 2, 3...




**OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES**

**Suma de los Números Naturales:**

$$\mathbf{a + b = c}$$

Los términos de la suma, **a** y **b**, se llaman **sumandos** y el resultado, **c**, **suma**.

**Propiedades de la suma de números naturales:**

**Interna:** el resultado de **sumar dos números naturales** es otro **número natural**.

$$\mathbf{a + b \in N}$$

**Asociativa:** el modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

Por ejemplo:

$(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$
$5 + 5 = 2 + 8$
$10 = 10$

**Conmutativa:** el orden de los sumandos no varía la suma.

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

Por ejemplo:

$$2 + 5 = 5 + 2$$
$$7 = 7$$

**Elemento neutro: El 0 es el elemento neutro** de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.

$$\mathbf{a + 0 = a}$$

Por ejemplo:

$$3 + 0 = 3$$

**Resta de Números Naturales:**

$$\mathbf{a - b = c}$$

Los términos que intervienen en una **resta** se llaman: **a**, **minuendo** y **b**, **sustraendo**. Al resultado, **c**, lo llamamos **diferencia**.

**Propiedades de la resta de números naturales:**

**No es una operación interna**: El resultado de **restar dos números naturales** no siempre es otro **número natural**. $2 - 5 \notin \mathbb{N}$

**No es Conmutativa:** el orden de sus factores pude afectar el resultado de la operación. Dado que el signo "–" pertenece a la operación y no a algún número de al expresión.

$$5 - 2 \neq 2 - 5$$

**Multiplicación de Números Naturales:**

**Multiplicar dos números naturales** consiste en **sumar uno** de los **factores consigo mismo** tantas veces como indica el otro **factor**.

$$\mathbf{a \cdot b = c}$$

Los términos **a** y **b** se llaman **factores** y el resultado, **c**, **producto.**

**Propiedades de la multiplicación de números naturales:**

Interna:

El resultado de **multiplicar dos números naturales** es otro **número natural**.

$$\mathbf{a \cdot b} \in \mathbb{N}$$

**Asociativa:** el modo de agrupar los **factores** no varía el resultado.

$$\mathbf{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

Por ejemplo:

$$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$$
$$6 \cdot 5 = 2 \cdot 15$$
$$30 = 30$$

**Conmutativa:** el orden de los **factores** no varía el **producto**.

$$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$$

Por ejemplo:

$$2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$$
$$10 = 10$$

**Elemento neutro: El 1 es el elemento neutro de la multiplicación de números naturales**, porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

$$\mathbf{a \cdot 1 = a}$$

Por ejemplo:

$$3 \cdot 1 = 3$$

**Distributiva:** La **multiplicación** de un **número natural** por una **suma** es igual a la suma de los **multiplicaciones** de dicho **número natural** por cada uno de los **sumandos**.

$$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Por ejemplo:

$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$
$$2 \cdot 8 = 6 + 10$$
$$16 = 16$$

**Sacar factor común:**

Es el proceso inverso a la ***propiedad distributiva***.

Si varios **sumandos** tienen un **factor común**, podemos transformar la **suma** en **producto** extrayendo dicho **factor.**

$$\mathbf{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)}$$

Por ejemplo:

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 2 \cdot (3 + 5)$$
$$6 + 10 = 2 \cdot 8$$
$$16 = 16$$

División de Números Enteros:

$$D / d = c$$

Los términos que intervienen en una **división** se llaman, **D**, **dividendo** y, **d, divisor**. Al resultado, **c**, lo llamamos **cociente**.

**Tipos de divisiones:**

**División exacta:** una **división** es **exacta** cuando el **resto** es **cero**.

$$\mathbf{D = d \cdot c}$$

**Por ejemplo:**

$$\begin{array}{l|l} 15 & 5 \\ \cline{2-2} \boxed{0} & 3 \end{array}$$

$$\mathbf{15 = 5 \cdot 3}$$

**División entera:** una **división** es **entera** cuando el **resto** es **distinto** de **cero**.

$$D = d \cdot c + r$$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \cline{2-2} \boxed{2} & 3 \end{array}$$

$$17 = 5 \cdot 3 + 2$$

**Propiedades de la división de números naturales:**

**No es una operación interna:** el resultado de **dividir dos números naturales** no siempre es otro **número natural**. 2 **/** 6 $\notin \mathbb{N}$

**No es Conmutativo:**

$$a / b \neq b / a$$

Por ejemplo:

6 **/** 2 ≠ 2 / 6

**Cero dividido entre cualquier número da cero.**

**Por ejemplo:**

0 **/** 5 = 0

**No se puede dividir por 0:**

Está denotado como error matemático.

Por ejemplo:

Al ingresar una división por cero en la calculadora. Marcará error.

**NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS**

Un número primo es un número natural que solo tiene dos factores que son el número mismo y el uno. Un número compuesto tiene otros factores además de sí mismo y el uno.

Los números 0 y 1 no son ni primos ni compuestos.

Todos los números pares son divisibles por dos por lo tanto todos los números pares mayores que dos son números compuestos. Todos los números que terminan en cinco son divisibles por cinco. Por lo tanto todos los números que terminan en cinco y son más grandes que cinco son números compuestos.

**Ejemplo y Ejercicio (01) de Aplicación.**

Para hallar los números primos entre 1 y 100, construiremos la criba de Eratóstenes. Por lo que al final de los pasos para encontrar los números primos se te presentara una tabla de números para que puedas paso a paso encontrar los números primos en el límite antes mencionado.

**Sigue los pasos siguientes:**

1. El primer número que aparece sin tachar es el 2, que es primo (rodéalo con una circunferencia en rojo). Tacha, a partir del 2, todos los números de 2 en 2; éstos (4, 6, 8, 10, 12,...) no son primos pues son todos divisibles por 2.

2. El siguiente número que aparece sin tachar es el 3, que es primo (rodéalo con una circunferencia en rojo).Tacha, a partir del 3, todos los números de 3 en 3, incluso los ya tachados anteriormente; éstos (3, 6, 9, 12, 15,...) no son primos pues son todos divisibles por 3.

**3.** El siguiente número que aparece sin tachar es el 5, que es primo (rodéalo con una circunferencia en rojo). Tacha, a partir del 5, todos los números de 5 en 5, incluso los ya tachados anteriormente; éstos (5, 10, 15, 20, 25,...) no son primos pues son todos divisibles por 5.

**4.** Continúa este proceso mientras te sea posible seguir tachando números. Por ejemplo el 77 es divisible dentro de 7 que su resultado es 11, y el 91 que es divisible también dentro de 7 que su resultado es 13… El siguiente número que aparece sin tachar es el...

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Solución.** Los números primos entre dos y 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

**EJERCICIO 02.** Lee, analiza y responde los siguientes problemas con cantidades de números naturales.

**1.** Un número es 20 unidades mayor que otro y si se dividen, se obtiene un cociente exacto de tres unidades. ¿Cuáles son esos números?

**2.** Busca tres números naturales consecutivos cuya suma sea 69.

**3.** ¿Qué tres números pares consecutivos suman 60?

**4.** Un parque de atracciones recibe una media de 860 personas al día en primavera, 1540 en verano, 620 en otoño y 156 en invierno. ¿Cuántos visitantes tiene en un año?

**5.** Aurora, Joaquín e Irene han vendido papeletas para la excursión de fin de curso. Si preguntamos a Aurora y a Joaquín cuántas han vendido entre los dos, responderán que 25. Si preguntamos a Joaquín e Irene, dirán que 35, y si lo hacemos con Aurora e Irene, dirán que 30. ¿Cuántas papeletas ha vendido cada uno?

**6.** Un almacenista de fruta compra las manzanas a Q22.00 la caja y las vende a 2 Q/kg. Sabiendo que una caja contiene 15 kg, ¿cuántas cajas ha de vender para ganar Q 600.00?

**7.** En una familia el padre cobra Q1547.00 al mes, la madre Q1186.00 y la hija mayor Q 849.00 Si el abuelo cobra una pensión de Q659.00 ¿Cuáles son los ingresos mensuales de la familia?

**8.** Una finca rectangular tiene 90 m de largo y 42 m de ancho. Se desea cercar con una alambrada sostenida por postes colocados cada 6 metros. Si cada poste cuesta Q10.00, y cada metro de alambrada cuesta Q2.00 ¿cuánto costará la cerca?

**9.** Un restaurante pagó el mes pasado a su proveedor Q1144.00 por una factura de Q143 kg de carne. ¿Cuántos kilos ha gastado este mes sabiendo que la factura asciende a Q 1448.00?

**10.** Con la venta de 21 vacas se han comprado 8 caballos y han sobrado Q 7250.00 Si cada caballo se ha valorado en Q 800.00, ¿en cuánto se ha valorado cada vaca?

**11.** En un puesto de venta de jugos de frutas; se encuentran 3 canastas con 10 manzanas cada uno, 5 canastas con 8 peras cada una, 6 canastas con 12 kiwis cada una y 8 canastas con 3 papayas cada una. ¿Cuántas frutas habrá en total, según la fruta? y ¿Cuántas frutas hay en total, sumando los totales por tipo de fruta?

**12.** En una cancha de tenis se encuentran 10 pelotas para jugar tenis en un campeonato de clasificación, si en el complejo deportivo hay 4 canchas ¿Cuántas pelotas hay en total para jugar al tenis?

**13.** Un pastel alcanza para 38 personas, si al cumpleaños llegaron únicamente la mitad de invitados y a estos les tocaba una porción de pastel ¿Cuántas porciones les tocará a los únicos que llegaron?

**14.** En un yate pueden abordar 15 personas, en el puerto hay 12 yates ¿Cuántas personas abordan el día de hoy?

**15.** Se necesitan repartir 10 pelotas entre 3 niños. A cada uno le tocará un número de pelotas igual a su edad. Las edades son 4, 5, y 1 año. ¿Cuántas pelotas le corresponde a cada niño?

**16.** Si hay 200 cajas de galletas y cada una contiene 24 unidades. ¿Cuántas unidades hay en total?

**17.** En un parqueo caben 100 vehículos si durante los 5 días de la semana laboral el parqueo se mantiene con cupo lleno durante la jornada diaria de trabajo y por cada vehículo cobran Q 15.00 diarios de parqueo ¿Cuánto en quetzales reunirán en 20 días trabajados en el mes?

**18.** ¿Cuántas naranjas serán utilizadas para 50 vasos de jugo, si para cada vaso se utilizan 4 naranjas?

**19.** Si hay Q 200.00 y hay 4 niños en casa ¿Cuánto le tocará a cada uno en cantidad igual?

**20.** Una venta de dulces se venden el día de hoy 20 cajas de chocolates y cada caja contiene 15 unidades ¿Cuántas unidades se vendieron en total?

**21.** Juan y Jorge van en bicicleta y salen del mismo lugar. Juan avanza 6 km y luego retrocede 2 km, mientras que Jorge avanza 8 km y retrocede 5 km.

**a.** ¿A qué distancia se encuentra uno del otro?
**b.** ¿Quién ha avanzado más de los dos?
**c.** ¿Quién ha recorrido más km?

**22.** Una máquina de hacer pozos perfora 15 m al día. Si ha tardado 8 días en perforar un pozo de petróleo, ¿qué profundidad tiene el pozo?

**23.** Pitágoras murió el año 493 a de C y nació en el 580 a.C. ¿Cuántos años vivió?

**24.** A cuántos años, meses y semanas; equivalen 3650 días.

**25.** En la autopista principal de aterrizaje del Aeropuerto La Aurora diariamente se atienden 18 vuelos hacia otros países de Centroamérica. Se desea saber cuántos vuelos son atendidos en las últimas 24 semanas, ya que la administración del aeropuerto desea atender 5 vuelos más al día ¿Cuántos vuelos serán atendidos en las siguientes 24 semanas si a diario se incrementarían esos 5 vuelos planificados?

**26.** En un salón de clase hay 20 niños y 22 niñas ¿Cuántos alumnos hay en total?

**27.** ¿Cuántos litros de helado se necesitan para servir postre a 50 personas si por litro se le sirve el postre a 10 personas?

**28.** Se desea saber cuántas frutas hay en total en 3 canastos. Si cada uno contiene 15 frutas.

**29.** Se necesitan 5 vasos con agua para llenar un envase de un litro ¿Cuántos se necesitarán para llenar 20 litros?

**30.** Se tienen 100 bombones que se repartirán entre 25 niños ¿Cuántos bombones le tocan a cada niño?

## NÚMEROS ENTEROS

El **conjunto de los números enteros** es el conjunto que contiene a los números cardinales y los enteros negativos, representados por la letra mayúscula ***I***. Esto es,

$$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

**Reglas para efectuar operaciones con los números enteros:**

**Suma:**

**Positivo + Positivo:** se suman los valores absolutos y se mantiene el mismo signo.

Ejemplos: 8 + 7 = 15; 5 + 11 = 16

**Negativo + Negativo:** se suman los valores absolutos y se mantiene el mismo signo.

Ejemplos: -12 + -4 = -16; -9 + - 6 = - 15

**Positivo + Negativo o Negativo + Positivo:** se halla la diferencia de los valores absolutos de los números. El resultado es **positivo**, si el número positivo tiene el valor absoluto mayor. El resultado es **negativo**, si el número negativo tiene el valor absoluto mayor.

Ejemplos: 13 + -6 = 7; 19 + - 11 = 8; -14 + 6 = -8; -12 + 7 = -5; 3 + (-3) = 0

**Resta:**

Cuando se resta números enteros, se cambia el ejercicio de resta a la suma de su opuesto. El número que está siendo restado se llama **sustraendo**. El sustraendo es el número que está después del signo de resta. El signo de resta se reemplaza por el signo de suma y se busca el opuesto del sustraendo. Luego de transformar el ejercicio de resta a suma, se procede con las reglas de suma de números enteros. Esto es, si **a** y **b** son enteros, entonces, **a – b = a + (- b).**

Ejemplos:
8 – 12 = 8 + (-12) = -4
8 – (-12) = 8 + 12 = 20
-2 – (-10) = -2 + 10 = 8
-2 – 10 = -2 + (-10) = -12

**Multiplicación de Números Enteros:**

La **multiplicación** de varios **números enteros** es otro **número entero**, que tiene como **valor absoluto el producto de los valores absolutos** y, como **signo**, el que se obtiene de la aplicación de la **regla de los signos**.

**Regla de los signos:**

**+ por + = +**
**- por - = +**
**+ por - = -**
**- por + = -**

Por ejemplo:

$$2 \cdot 5 = 10$$
$$(-2) \cdot (-5) = 10$$
$$2 \cdot (-5) = -10$$
$$(-2) \cdot 5 = -10$$

**Propiedades de la multiplicación de números enteros:**

**Interna:** el resultado de **multiplicar dos números enteros** es otro **número entero**.

$$\mathbf{a \cdot b} \in \mathbb{Z}$$

Por ejemplo: $2 \cdot (-5) \in \mathbb{Z}$

**Asociativa: el modo de agrupar los factores no varía el resultado.** Si a, b y c son **números enteros** cualesquiera, se cumple que:

$$\mathbf{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

Por ejemplo: $(2 \cdot 3) \cdot (-5) = 2 \cdot [(3 \cdot (-5)]$
$6 \cdot (-5) = 2 \cdot (-15)$
$-30 = -30$

**Conmutativa: el orden de los factores no varía el producto.**

$$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$$

Por ejemplo: $2 \cdot (-5) = (-5) \cdot 2$
$-10 = -10$

**Elemento neutro:** el **1** es el **elemento neutro** de la **multiplicación** porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

$$\mathbf{a \cdot 1 = a}$$

Por ejemplo: $(-5) \cdot 1 = (-5)$

**Distributiva:** El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

$$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

**Por ejemplo:**

$(-2) \cdot (3 + 5) = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 5$
$(-2) \cdot 8 = (-6) + (-10)$
$-16 = -16$

**Sacar factor común:** es el proceso inverso a la propiedad distributiva.

Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

$$\mathbf{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)}$$

Por ejemplo:

$(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = (-2) \cdot (3 + 5)$

**División de Números Enteros:**

La división de dos números enteros es igual al valor absoluto del cociente de los valores absolutos entre el dividendo y el divisor, y tiene de signo, el que se obtiene de la aplicación de la regla de los signos.

**Regla de los signos:**

**+ entre + = +**
**- entre - = +**
**+ entre - = -**
**- entre + = -**

Por ejemplo:

$10 / 5 = 2$
$(-10)$ 7 $(-5) = 2$
$10 / (-5) = -2$
$(-10) / 5 = -2$

**Propiedades de la división de números enteros:**

**No es una operación interna:** El resultado de **dividir dos números enteros** no siempre es otro **número entero**.

$$(-2) / 6 \notin \mathbb{Z}$$

**No es Conmutativo:**

$$\mathbf{a / b \neq b / a}$$

$$6 / (-2) \neq (-2) / 6$$

**EJERCICIO 03.** Efectuar las operaciones indicadas de números enteros:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1)** 8 + 15 | **2)** -19 + (-7) | **3)** -15 + 9 | **4)** 12 + (-18) |
| **5)** 13 – 8 | **6)** 9 – 14 | **7)** -2 – 12 | **8)** -6 – (-5) |
| **9)** 13 – (-6) | **10)** 5 + (-2) + (-8) + 4 | **11)** 6 x 7 | **12)** -8 x 5 |
| **13)** (-9) (-8) | **14)** 3 x (-12) | **15)** (-3) (7) (-2) | **16)** (-2) (6) (7) |
| **17)** (-4) (-5) (-8) | **18)** 42 ÷ (-6) | **19)** (-54) ÷ (-3) | **20)** (-56) ÷ 8 |
| **21)** 8 + 15 | **22)** -15 + (-8) / 1 | **23)** -15 + 15 | **24)** 12÷ (-4) |
| **25)** 15 – -19 | **26)** 8 – 12 | **27)** -7 + 12 + -15 | **28)** -6 ÷ (-3) |
| **29)** 13 ÷ (-6) | **30)** 5 + (-5) + (-9) + 14 | | |

**NÚMEROS RACIONALES**

Un **número racional** es todo **número** que puede representarse como el **cociente** de **dos enteros**, con denominador distinto de cero. Se representa por **Q**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z}; \ b \in \mathbb{Z}; \ b \neq 0 \right\}$$

**OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES**

**Suma y resta de números racionales:**

Con el mismo denominador:

**Se suman o se restan los numeradores y se mantiene el denominador.**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

**Con distinto denominador:**

En primer lugar **se** reducen los denominadores a común denominador, y **se suman o se restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas.**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{15+2}{12} = \frac{17}{12}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{6} = \frac{15-2}{12} = \frac{13}{12}$$

**Propiedades de la suma de números racionales:**

**Interna:** **a + b** $\in \mathbb{Q}$

**Asociativa:** (**a + b) + c = a + (b + c)**.

Por ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) \quad \frac{2+1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\frac{2+3}{8}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\frac{5}{8} \qquad \frac{6+3}{8}=\frac{4+5}{8} \qquad \frac{9}{8}=\frac{9}{8}$$

**Conmutativa: a + b = b + a**

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{2+1}{4}=\frac{1+2}{4} \qquad \frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

**Elemento neutro: a + 0 = a**

$$\frac{3}{4}+0=\frac{3}{4}$$

**Elemento opuesto: a + (−a) = 0**

$$\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3-3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

$$-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

**Multiplicación de números racionales:**

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$$

**Propiedades de la multiplicación de números racionales:**

**Interna:** **a · b** $\in \mathbb{Q}$

**Asociativa: (a · b) · c = a · (b · c)**

Por ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\right) \qquad \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{20} \qquad \frac{3}{40}=\frac{3}{40}$$

**Conmutativa: a · b = b · a**

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{8} \qquad \frac{3}{40}=\frac{3}{40}$$

**Elemento neutro: a ·1 = a**

$$\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{3}{8}$$

**Elemento inverso:** $a\cdot\frac{1}{a}=1$

Por ejemplo:

$$5\cdot\frac{1}{5}=1$$

**Distributiva:**

**a · (b + c) = a · b + a · c**

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}=\frac{1}{8}+\frac{3}{4} \qquad \frac{7}{8}=\frac{7}{8}$$

**Sacar factor común:**

**a · b + a · c = a · (b + c)**

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)$$

**División de números racionales:**

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

De forma breve, puede decirse que la operación de división de los números racionales, se asemeja a la operación de la multiplicación, pero esta, se opera de forma cruzada. En otras palabras formando una cruz entre los términos a y d, y los términos c y d. Colocando como numerador el resultado de a · d y como denominador el resultado de b · c.

Por ejemplo:

$$\frac{5}{7}:\frac{1}{6}=\frac{30}{7}.$$

**EJERCICIO 04.** Calcula las siguientes operaciones con números racionales:

**1.** $\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)=$

**2.** $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=$

**3.** $\left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)=$

**4.** $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)=$

**5.** $\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=$

**6.** $\frac{11}{9}-\frac{7}{9}=$

**7.** $\frac{2}{9}+\frac{7}{6}=$

**8.** $\frac{5}{4}-\frac{25}{12}+\frac{7}{10}=$

**9.** $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=$

**10.** $\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{4}=$

## POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

### POTENCIACIÓN

Una **potencia** es una forma abreviada de escribir un **producto** formado por varios **factores iguales**. Por ejemplo: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$

**Base de una potencia:**

La base de una potencia es el número que multiplicamos por sí mismo, en este caso el 6.

**Exponente de una potencia:**

El exponente de una potencia indica el número de veces que multiplicamos la base, en el ejemplo es el 5.

**Potencia de exponente entero positivo:**

Si ***a*** es un número real y ***n*** un entero positivo, se define:

$$a^1 = a$$
$$a^n = a^{n-1}\cdot a,\ \ si\ n > 1$$

El número ***a*** se llama base de la potencia, ***n*** se llama exponente y $a^n$ es la potencia enésima de ***a***.

Observemos que la aplicación sucesiva de la definición anterior conduce a:

$$a^1 = a$$
$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$$
$$\ldots\ldots$$

$a^n$ Expresa la multiplicación de $n$ factores iguales al número $a$.

**Potencia de exponente cero:**

Si ***a*** es un número real distinto de cero, se define:

$$a^0 = 1$$

Observemos que con esta definición se puede extender la segunda parte de la definición 1 cuando ***n=1*****:**

**$a^{1} = a^{0} \cdot a = 1 \cdot a = a$ Potencia de exponente entero negativo:**

Si ***a*** es un número real y ***n*** un entero positivo, el nero ***a*** $^{-n}$ designa al número $\frac{1}{a^{n}}$

Es decir: $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$, *si* $a \neq 0.$

**PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS**

1. Multiplicación de potencias de base igual:

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$$

2. División de potencias de base igual:

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$$

3. Potencia de una potencia:

$$\left(a^{m}\right)^{n} = a^{m \times n}$$

4. Multiplicación de potencias de exponente igual:

$$a^{m} \times b^{m} = (a \times b)^{m}$$

5. División de potencias de exponente igual:

$$\frac{a^{m}}{b^{m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m}$$

**RADICALES**

A continuación definiremos la principal raíz enésima de un número real.

Definición de $\sqrt[n]{a}$ Sean *n* un numero entero positivo mayor de 1 y *a*, un número real.

**1.** Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0.$

**2.** Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real positivo *b* tal que $b^{n} = a$ .

**3.** *a)* Si $a < 0$ y *n* es non, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real *negativo b* tal que $b^{n} = a$ .

*b)* Si $a < 0$ y *n* es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

Si *n=2* se escribe $\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$ y $\sqrt{a}$ se llama *raíz cuadrada principal* de o simplemente *raíz cuadrada de a.*

El número $\sqrt[3]{a}$ es la raíz cúbica de a.

**Ilustraciones:**

$$\sqrt{16}=4, \quad porque \quad 4^2=16$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{1}{2}, \quad porque \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

$$\sqrt[3]{-8}=-2, \quad porque \quad (-2)^3=-8$$

$$\sqrt[4]{-16} \quad no\ es\ número\ real$$

Observa que $\sqrt{16}\neq\pm4$ porque, por definición, las raíces de números reales positivos son positivas. El símbolo $\pm$ se lee "más o menos".

Para completar nuestra terminología, la expresión $\sqrt[n]{a}$ es un radical, el número *a* se llama **radicando** y *n* es el **índice del radical.** El símbolo $\sqrt{\ }$ es el signo radical.

Si $\sqrt{a}=b$, entonces: $b^n=a$; esto es $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.

**En general se presenta la siguiente tabla de propiedades.**

Propiedades de $\sqrt[n]{\ }$ (n es un entero positivo).

| Propiedad | Ejemplo |
| --- | --- |
| $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a, \quad si\ \sqrt[n]{a}\ es\ un\ número\ real.$ | $\left(\sqrt[3]{-5}\right)^3=-5$ |
| $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)=a, \quad si\ a\geq 0.$ | $\sqrt{5^2}=5$ |
| $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)=a, \quad si\ a<0\ y\ n\ es\ non.$ | $\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$ |
| $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)=\lvert a\rvert, \quad si\ a<0\ y\ n\ es\ par.$ | $\sqrt[4]{(-2)^4}=\lvert -2\rvert=2$ |

De esta última propiedad vemos que: $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$ para todo número real x. En particular, si $x\geq 0$ entonces $\sqrt{x^2}=x$ sin embargo si $x\leq 0$, entonces $\sqrt{x^2}=-x$, que es positiva.

Las tres leyes siguientes son verdaderas para los enteros positivos *m* y *n*, siempre que existan las raíces indicadas; es decir, siempre que las raíces sean números reales.

| Ley | Ejemplo |
| --- | --- |
| $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ | $\sqrt[3]{-108}=\sqrt[3]{(-27)(4)}=\sqrt[3]{-27}\sqrt[3]{4}=-3\sqrt[3]{4}$ |
| $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ | $\sqrt[3]{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$ |
| $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ | $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[2(3)]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$ |

Advertencias respecto a errores comunes:

$$\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$$
$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

*Simplificar un radical* quiere decir eliminar factores del radical hasta que el radicando contenga sólo exponente igual o mayor que el índice del radical y el índice sea tan pequeño como sea posible.

*Eliminación de factores de radicales.*

Simplifica el radical (todas las letras denotan números reales positivos):

**a)** $\sqrt[9]{64}$ **b)** $\sqrt[12]{27a^6x^3}$ **c)** $\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b}$

Solución:

**a)**
$$\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{4^3}$$
$$= \sqrt[3]{4}$$

**b)**
$$\sqrt[12]{27a^6x^3} = \sqrt[12]{3^3a^6x^3}$$
$$= \sqrt[4]{3a^2x}$$

**c)**
$$\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b} = \sqrt{3a^2b^3 \cdot 2 \cdot 3a^5b}$$
$$= \sqrt{(3^2a^6b^4)(2a)}$$
$$= \sqrt{(3a^3b^2)^2(2a)}$$
$$= \sqrt{(3a^3b^2)^2}\sqrt{2a}$$
$$= 3a^3b^2\sqrt{2a}$$

Si al denominador de un cociente contiene un factor de la forma $\sqrt[n]{a^k}$, con $k < n$ y $a > 0$ entonces al multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ eliminaremos el radical del denominador porque: $\sqrt[n]{a^k}\sqrt[n]{a^{n-k}} = \sqrt[n]{a^{k+n-k}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$

Este proceso se llama **racionalización del denominador**.

| Factor en el denominador | Multiplicar numerador y denominador por | Factor resultante |
|---|---|---|
| $\sqrt{a}$ | $\sqrt{a}$ | $\sqrt{a}\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$ |
| $\sqrt[3]{a}$ | $\sqrt[3]{a^2}$ | $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=a$ |
| $\sqrt[7]{a^3}$ | $\sqrt[7]{a^4}$ | $\sqrt[7]{a^3}\sqrt[7]{a^4}=\sqrt[7]{a^7}=a$ |

Ejemplos:

**Racionalización de denominadores:**

Racionaliza:

**a)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **b)** $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y^2}}$

Solución:

**a)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

**b)** $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y^2}}=\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}}=\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}}\dfrac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}}=\dfrac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}}=\dfrac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$

Este proceso algebraico, en cursos avanzados puede complicar el cálculo para la resolución del problema, es por ello que se recomienda analizar y seleccionar el procedimiento adecuado.

**Definición de exponentes racionales:**

Sea *m/n* un número racional, donde *n* es un entero positivo mayor de 1. Si *a* es un número real tal que existe $\sqrt[n]{a}$, entonces:

$$a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$$
$$a^{m/n}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$
$$a^{m/n}=\left(a^{1/n}\right)^m=\left(a^m\right)^{1/n}$$

*Nota:*

*Las leyes de los exponentes son ciertas para exponentes racionales e irracionales.*

**Simplificación de potencias racionales:**

Simplifica:

**a)** $(-27)^{2/3}(4)^{-5/2}$ **b)** $\left(\dfrac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$ **c)** $\left[\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{7}\right)^4}\right]^{\frac{2}{7}}$

Solución:

a)

$$
\begin{aligned}
(-27)^{2/3}(4)^{-5/2} &= \left(\sqrt[3]{-27}\right)^{2}\left(\sqrt{4}\right)^{5}\\
&= (-3)^{2}(2)^{-5}\\
&= \frac{(-3)^{2}}{2^{5}}\\
&= \frac{9}{32}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^{2}\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) &= \left(\frac{4x^{4/3}}{y}\right)\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)\\
&= \frac{(4\cdot 3)x^{4/3-5/6}}{y^{1+(1/3)}}\\
&= \frac{12x^{8/6-5/6}}{y^{4/3}}\\
&= \frac{12x^{1/2}}{y^{4/3}}
\end{aligned}
$$

**c)**

$$
\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{7}\right)^{4}}\right]^{\frac{2}{7}} = \left[\frac{1}{\frac{1}{7}}\right]^{\frac{2}{7}} = \frac{7^{2}}{7} = \sqrt[7]{49}
$$

**EJERCICIO 05.** Resuelva las siguientes potencias:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3$ | **2.** $5^7 / 5^3$ | **3.** $(5^3)^4$ | **4.** $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4$ | **5.** $(3^4)^4$ |
| **6.** $[(5^3)^4]^2$ | **7.** $(8^2)^3$ | **8.** $(9^3)^2$ | **9.** $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2$ | **10.** $2^7 / 2^6$ |
| **11.** $10^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3$ | **12.** $10^8$ **/** $5^8$ | **13.** $((4^4)^5)^2$ | **14.** $12^7 / 6^7$ | **15.** $(2 \cdot 10)^5$ |
| **16.** $100^2 / 10^2$ | **17.** $(5 \cdot 4)^2$ | **18.** $30^1 / 3^1$ | **19.** $((5^2)^1)$ | **20.** $5^1 \cdot 5^0$ |

**EJERCICIO 06.** Resuelva las siguientes raíces:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{27}$ | 2. $\sqrt{25} \cdot \sqrt[3]{5^3}$ | 3. $\sqrt{100}$ | 4. $\sqrt[4]{(16 \cdot 625 \cdot 6561)}$ |
| 5. $\sqrt{4a^2 + 9b^2 + c^2}$ | 6. $\sqrt[4]{4096}$ | 7. $\sqrt{0}$ | 8. $\sqrt[3]{81}$ |
| 9. $\sqrt[2]{64}$ | 10. $\sqrt[3]{27/9}$ | | |

**EJERCICIO 07.** Simplifique lo siguiente:

**1.** $-\frac{3^2}{(-3)^2}$ **2.** $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \div \left(\frac{2}{5}\right)^3$ **3.** $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^4$ **4.** $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \div \left(\frac{1}{4}\right)^2$